# **מתמטיקה בדידה – סמסטר א תשע"ב – תרגיל 8 – פתרון בעיות קומבינטוריות ע"י רקורסיה**

### שאלה 1 סעיף **ב: מצא/י** נוסחה רקורסיבית ותנאי התחלה **לתיאור מספר המילים מעל האלף בית** באורך בהן אין רצף של שתי ספרות 2.

נסמן:

היא סדרת המילים מעל הא"ב הנ"ל (הסדרה הדרושה לנו), שאיבריה הם .

היא סדרת המילים הנ"ל המסתיימות ב.

היא סדרת המילים הנ"ל המסתיימות בספרה אחרת (0 או 1).

מסקנות:

היא איחוד של איברי עם איברי (ע"פ ההגדרה), ולכן:

מספר המשתייך לסדרה – מסתיים ב ולכן הספרה הלפני-אחרונה שלו איננה 2, ומכאן:

מספר המשתייך לסדרה C – אם נוריד ממנו את הספרה האחרונה (שהיא 0 או 1) נקבל איבר תקין בסדרה A, ומכאן:

אם כך דרושים לנו 2 תנאי התחלה על 2 האיברים הראשונים:

על האיבר הראשון אין לנו שום תנאי, ולכן .

האיבר השני יכול להכיל כל מספר דו-ספרתי מעל הא"ב הנ"ל מלבד הרצף , ולכן

והנוסחא הסופית:

### שאלה 2: מצא/י נוסחה רקורסיבית ותנאי התחלה לתיאור מספר הסדרות מעל אשר סכום איבריהן הוא .

נסמן ב את סדרת מספרי הסדרות מעל , שאיבריה הם .

לכל סדרה מעל שסכומה – אם נוסיף לה איבר אחרון 1 נקבל סדרה תקנית שסכומה .

לכל סדרה כנ"ל שסכומה – אם נוסיף לה איבר אחרון 2 – נקבל סדרה תקנית שסכומה .

כי בשביל לקבל סכום של 1 חייבים להשתמש בסדרה בלבד.

כי הסדרות המתאימות לנו הן .

מסקנות:

(אפשר לומר שזו סדרת פיבונאצ'י בהזזה של אחד)

### שאלה 3: מצא/י נוסחה רקורסיבית ותנאי התחלה לתיאור מספר הדרכים לריצוף לוח שמידותיו באמצעות מרצפות אשר גודלן ו- .

זהו תיאור פרקטי של הסדרות מהשאלה הקודמת, ולכן הסדרה זהה:

### שאלה 4: מהו מספר המלים מעל באורך אשר אינן מכילות את התבנית 11 ולא את התבנית 22?

נסמן:

היא סדרת המילים מעל הא"ב הנ"ל (הסדרה הדרושה לנו), שאיבריה הם .

היא סדרת המילים הנ"ל המסתיימות ב.

היא סדרת המילים הנ"ל המסתיימות ב1.

היא סדרת המילים הנ"ל המסתיימות ב0.

מסקנות:

היא איחוד של איברי עם איברי עם איברי (ע"פ ההגדרה), ולכן:

מספר המשתייך לסדרה – מסתיים ב ולכן הספרה הלפני-אחרונה שלו איננה 2, ומכאן:

מספר המשתייך לסדרה C – מסתיים ב ולכן הספרה הלפני-אחרונה שלו איננה 1, ומכאן:

מספר המשתייך לסדרה D – אם נוריד ממנו את הספרה האחרונה נקבל איבר תקין בסדרה A, ומכאן:

נשים לב שסכום איברי הסדרות B ו-C נותן לנו תוצאה חשובה:

נציב זאת במשוואה הראשונה, ונקבל:

אם כך דרושים לנו 2 תנאי התחלה על 2 האיברים הראשונים:

כי אין עליו שום הגבלות.

כי כל מספר דו-ספרתי הוא תקין מלבד 22,11.

והנוסחא הסופית:

### שאלה 7: מצא/י נוסחה רקורסיבית ותנאי התחלה לתיאור מספר הסדרות באורך מעל בהן אין שתי ספרות זוגיות זהות סמוכות .

נסמן:

היא סדרת המילים מעל הא"ב הנ"ל (הסדרה הדרושה לנו), שאיבריה הם .

היא סדרת המילים הנ"ל המסתיימות ב.

היא סדרת המילים הנ"ל המסתיימות ב4.

היא סדרת המילים הנ"ל המסתיימות בספרה אי-זוגית.

מסקנות:

היא איחוד של איברי עם איברי עם איברי (ע"פ ההגדרה), ולכן:

מספר המשתייך לסדרה – מסתיים ב ולכן הספרה הלפני-אחרונה שלו איננה 2, ומכאן:

מספר המשתייך לסדרה C – מסתיים ב ולכן הספרה הלפני-אחרונה שלו איננה 4, ומכאן:

מספר המשתייך לסדרה D – אם נוריד ממנו את הספרה האחרונה (שהיא 1 או 3 או 5) נקבל איבר תקין בסדרה A, ומכאן:

נשים לב שסכום איברי הסדרות B ו-C נותן לנו תוצאה חשובה:

נציב זאת במשוואה הראשונה, ונקבל:

אם כך דרושים לנו 2 תנאי התחלה על 2 האיברים הראשונים:

כי אין עליו שום הגבלות.

כי כל מספר דו-ספרתי הוא תקין מלבד 22,44.

והנוסחא הסופית:

נ.ב. למעוניינים לעבור מנוסחת נסיגה לנוסחה מפורשת: באם האיבר נתון כצירוף ליניארי של האיברים שלפניו עם תנאי התחלה – אז פתרון הנוסחא דומה כמעט לחלוטין לפתרון משוואה דיפרנציאלית ליניארית הומוגנית מסדר : משערים שמדובר ב. מציבים, מקבלים פולינום ממעלה ומקבלים פתרונות עבור . אומרים שהאיבר הכללי הוא צ"ל של הפתרונות האלו, ופותרים מערכת של משוואות ליניאריות על נעלמים לפי תנאי ההתחלה. לדוגמא והסברים נוספים – [www.gadial.net/?p=199](http://www.gadial.net/?p=199).